réf : Gourdon p. 284

Développement : Le théorème de Weierstrass par la convolution :

Leçon 209
203
209
228
241

Théorème :

Soit $I = [a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est limite uniforme de polynômes sur $[a,b]$. Autrement dit les polynômes sur $[a,b]$ sont dense dans $\mathcal{C}^0([a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve :

Soit $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Fixons $\varepsilon > 0$, $f \in E$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité, c'est à dire :

- $\chi_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall \alpha > 0, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|t|>\alpha} \chi_n(t)\,dt = 0$

▶ Étape 1 : Mq $(f * \chi_n)$ converge uniformément vers f :

Comme f est à support compact, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par ailleurs on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, on ait $\int_{|t|>\delta} \chi_n(t)\,dt < \varepsilon$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
|\chi_n * f(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x-t)\,dt - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x-t)\,dt - f(x)\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,[f(x-t) - f(x)]\,dt\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\chi(t)|.|f(x-t) - f(x)|\,dt \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t).|f(x-t) - f(x)|\,dt + \int_{|t|>\delta} \chi_n(t).|f(x-t) - f(x)|\,dt \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t).\,\varepsilon\,dt + \int_{|t|>\delta} \chi_n(t).\,2.\,\|f\|_\infty\,dt \\
&\leq \varepsilon.\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt + 2.\|f\|_\infty.\,\varepsilon = \varepsilon(1 + 2.\|f\|_\infty)
\end{aligned}
$$

Ainsi $\|\chi_m * f - f\|_\infty \leqslant (1 + 2.\|f\|_\infty).\varepsilon$ d'où la convergence uniforme.

▶ Étape 2 :

On suppose que f est à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On considère pour $m \in \mathbb{N}$ $a_m := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^m \, dt$ et P_m la fct définie par

$$P_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{a_m}(1-t^2)^m & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* P_m est une approximation de l'identité. En effet :

→ P_m est positif $\forall m \in \mathbb{N}$

→ $\int_{\mathbb{R}} P_m(t)\, dt = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

→ Soit $0 < \delta \leqslant 1$. Alors

$$a_m = 2.\int_0^1 (1-t^2)^m dt \geqslant \int_0^1 2t.(1-t^2)^m dt = -\left[\frac{(1-t^2)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

et donc
$$\int_{|t|>\delta} P_m(t)\, dt = \frac{2}{a_m}\int_\delta^1 (1-t^2)^m dt$$
$$\leq 2.(m+1).\int_\delta^1 (1-t^2)^m dt$$
$$\leq 2.(m+1)(1-\delta^2)^m$$

qui tends vers 0 quand $m \to +\infty$.

* $f * P_m$ est un polynôme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$(f * P_m)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} P_m(x-t) f(t)\, dt$$

Pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a ainsi $|x-t| \leqslant 1$ et $P_m(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^m}{a_m}$
$$= \sum_{k=0}^{2m} q_k(t).x^k$$

avec $t \mapsto q_k(t)$ un polynôme. D'où :

$$(f * P_m)(x) = \sum_{k=0}^{2m} x^k.\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t) f(t)\, dt$$

est bien un polynôme en x sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

▶ Étape 3 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Considérons $c < d \in \mathbb{R}$ tq $[a,b] \subset]c,d[$, on prolonge f par :

- une fonction affine sur $[c,a]$, valant 0 en c et $f(a)$ en b
- une fonction affine sur $[b,d]$, valant 0 en d et $f(b)$ en b

On obtient ainsi une fonction continue à support dans $[c,d]$ donc dans E. Par un changement de coordonnées

$$\varphi : \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \longrightarrow [c,d]$$
$$x \longmapsto (d-c)x + \frac{c+d}{2}$$

On obtient que $f \circ \varphi^{-1}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes ψ_n par les étapes précédentes, donc f est limite uniforme de la suite $\psi_n \circ \varphi$, qui est bien une suite de polynômes car φ est affine. ■

Remarque :

C'est la démonstration originale, de Weierstrass. Une autre démo existe, et elle est constructive (i.e. on explicite la suite des polynômes). Elle fait intervenir les polynômes de Berstein et les probabilités.

Question du jury :

soit l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c^0$ muni de la loi de convolution. Cette loi est elle commutative ? oui par changement de variable $u = x - t$

distributive ? oui par linéarité de l'intégrale

Remarque : Le support de f est $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in I ; f(x) \neq 0\}}$ ne pas oublier l'adhérence